



TITLE:

密度が温度の弱い2次関数である場合のRayleigh-Benard対流パターン
(乱流による輸送, 拡散, 混合の数値)

AUTHOR(S):

山田, 祥子; 藤村, 薫

CITATION:

山田, 祥子 ...[et al]. 密度が温度の弱い2次関数である場合のRayleigh-Benard対流パターン
(乱流による輸送, 拡散, 混合の数値). 数理解析研究所講究録 2003, 1339: 145-153

ISSUE DATE:

2003-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/43435>

RIGHT:

密度が温度の弱い 2 次関数である場合の Rayleigh-Bénard 対流パターン

鳥取大学工学部 山田 祥子 (Syounko Yamada), 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

*Department of Applied Mathematics and Physics
Tottori University, Tottori 680-8552*

1 Introduction

Rayleigh-Bénard 対流のパターン形成の問題は、主として正六角形格子上で 3 次でうちきった振幅方程式を用いることによって解析されてきた。Schlüter, Lortz & Busse (1965) は、境界条件が上下非対称であっても作用素が自己随伴ならば、振幅方程式の 2 次の係数は 0 となることを明らかにした。Busse (1967) は、攪乱方程式が上下非対称で作用素が非自己随伴である場合を 3 次の振幅方程式を導くことによって調べた。非対称性の大きさを測るパラメーターと振幅で作った平面上に、ロールと正六角形の安定性相図を描き、ロールと正六角形はあるパラメーター領域にわたってともに安定で、どちらが実現されるかは初期条件に依存することを明らかにした。この正六角形の安定境界の下限は、亜臨界領域における正六角形のブランチのサドルノード点に対応する。Koschmieder の可視化実験 (1967) は、亜臨界領域、超臨界領域ともに、正六角形が安定に観察可能であることを示したが、これは Busse (1967) の結果を支持している。

Buzano & Golubitsky (1983) は、実験的にロールや正六角形などのパターンが観察される Rayleigh-Bénard 問題に代表される水平面内で Euclid 対称性をもつ分岐問題を、正六角形格子上に制限することによって取り扱った。攪乱方程式が上下非対称でかつ方程式に含まれる線形作用素が非自己随伴である場合の一般論を、共変分岐理論と特異点理論を用いて展開している。3 次のノーマルフォーム、普遍開折を導出し、分岐の分類を行った。Golubitsky, Swift & Knobloch (1984) は、攪乱方程式が上下対称な場合の一般論を展開した。ノーマルフォームが 5 次の項を含むことを明らかにし、普遍開折を導くことによって分岐の分類を行った。これらの共変分岐理論に基づく解析によって、正六角形格子上でのパターン形成問題は数学的には一応の解決をみたということが出来る。

しかし、比較的最近、Assenheimer & Steinberg (1996) は、パラメーターが Busse balloon の内側にあるにもかかわらずロールと up-hexagons, down-hexagons が安定に共存可能であることを実験的に見いだした。また Clever & Busse (1996) は、Boussinesq 近似下での上下反転対称な問題を 2 次不安定性の観点から数値的に取り扱い、プラントル数が 1 程度の値を超えるなら、up-hexagons と down-hexagons の両方が、臨界値の約 2 倍のレイリー数で安定になることを示し、ロールに加えてこれら正六角形対流パターンが初期条件に依存して実現される可能性を指摘した。このことは、Assenheimer & Steinberg の実験結果 (1996) に一貫している。

Nishida, Ikeda & Yoshihara (2002) は、正六角形格子に対応する $1:\sqrt{3}$ のアスペクト比をもつ長方形格子上で、ある解空間を設定し、Rayleigh-Bénard 対流に対する分岐の数値解析を行った。その結果、上下とも自由境界の場合には、1 次分岐解として安定なロールとパッチワークキルト、不安定な正六角形が存在すること、パッチワークキルトは長方形パターンに対して不安定になること、長方形のブランチが 1 次分岐解である正六角形から分岐する点から正六角形は安定性を獲得することなどを報告している。ロールとパッチワーク・キルトが両者ともに 1 次分岐直後から安定という結論は、Golubitsky, Swift & Knobloch によるパッチワークキルトは少なくとも局所的には不安定であるという結論と相容れない。これに明快な解答を下すためには、攪乱方程式が上下対称である Rayleigh-Bénard 対流に対して生成的な 5 次の振幅方程式を導出する必要がある。

上下の対称性が存在する問題では3次の方程式が生成的でないにも関わらず、これまでのところ Knobloch (1988) による上下壁ともにほとんど断熱条件に近い場合¹を除くと5次の振幅方程式が導かれた例はない。それは、高次の振幅方程式の導出が straightforward であるにも関わらず複雑を極めることと、生成的ではない3次の振幅方程式によるロールが安定であるという結論が実験的にも支持されるためと考えられる (Busse, 1995)。

ここでは、3次元攪乱方程式を正六角形格子に制限して無限次元力学系を導出し、中心多様体定理 (Carr, 1981) の方法を用いて5次の6次元振幅方程式を導く。方程式に含まれる係数を数値的に決定し、それに基づいて分岐の解析を行い、生成的な振幅方程式がどのような分岐特性を与えるのかを明らかにするのが目的である。

2 Physical setup and mathematical formulation

水平座標を x^* と y^* とし、重力と反対の鉛直上向き方向を z^* としよう。 $*$ の付いた量を次元量、付かない量を無次元量とする。 $z^* = 0, d$ に置かれた平板を、それぞれ $T^* = T_b, T_t$ という温度に保つ。そのとき、Boussinesq 近似の下での流体方程式は、次のように表される：

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* - \rho g \mathbf{e}_z + \mu \Delta^* \vec{v}^* \\ \frac{DT^*}{Dt^*} = \kappa \Delta^* T^* \\ \nabla^* \cdot \vec{v}^* = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、 g は重力加速度、 μ は粘性係数、 κ は温度拡散率、 ρ_0 はある参照温度 $T^* = T_r$ における流体の密度である。ここでは、簡単のため、上の平板温度 T_t を参照温度とする。Boussinesq 近似が成り立ち、さらに密度が温度の1次関数として表される場合、後出の攪乱方程式 (??) に含まれる線形作用素は自己随伴である。ここでは、攪乱方程式のもつ $z^* = \frac{d}{2}$ の面についての反転対称性 (Z_2) に摂動を加えて開折するために、密度の温度依存性に水の場合のように弱い2次の項を付加して、

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha^{(1)}(T^* - T_t) - \alpha^{(2)}(T^* - T_t)^2] \quad (2.2)$$

と仮定した。 $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ は体積膨張率である。

代表時間、代表速度、代表長さ、代表温度として

$$t^* = \frac{d^2}{\kappa} t, \quad \vec{v}^* = \frac{\kappa}{d} \vec{v}, \quad \vec{x}^* = d \vec{x}, \quad T^* - T_t = (T_b - T_t) T$$

を (2.1) に代入すると、レイリー数、プラントル数、体積膨張率の比という3つの無次元パラメーター

$$R = \frac{\rho_0 g \alpha^{(1)} (T_b - T_t) d^3}{\mu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \epsilon = \frac{\alpha^{(2)} (T_b - T_t)}{\alpha^{(1)}} \quad (2.3)$$

が現れる。 ϵ は開折パラメーターに相当する。主流は静水圧平衡、 $\bar{T} = 1 - z$ と $\vec{v} = 0$ によって与えられる。熱伝導状態の温度に加えられた攪乱を $\theta(x, y, z, t)$ と書く。無次元の非線形攪乱方程式は、

$$\begin{cases} P^{-1} \frac{D\vec{v}}{Dt} = -P^{-1} \nabla \pi + R \theta \mathbf{e}_z + R \epsilon (2\bar{T} \theta + \theta^2) \mathbf{e}_z + \Delta \vec{v}, \\ \frac{D\theta}{Dt} - w = \Delta \theta, \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

¹この場合、3次元の非線形攪乱方程式は長波長近似の下に水平面内の2次元の PDE に帰着することができるので、そこから5次の振幅方程式を導き係数を解析的に決定することは比較的容易である。

によって与えられる。上下の固体壁上で境界条件として

$$\vec{v} = \theta = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (2.5)$$

を課す。

x, y 方向にそれぞれ一様であり、 z 方向にのみ変化する定常状態に加えられた 3 次元攪乱 $\psi = (u, v, w, \theta)^T$ を考えることにする。 $\psi(x, y, z, t)$ を支配する非線形攪乱方程式を

$$\frac{\partial}{\partial t} S\psi = \mathcal{L}(\mu)\psi + \mathcal{N}(\psi, \psi), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{H}\psi = 0 \quad (z = 0, 1)$$

として書く。ここで、 S と $\mathcal{L}(\mu)$ は線形作用素、 \mathcal{N} は 2 次の非線形項、 \mathcal{H} は適当な線形作用素である。これら $S, \mathcal{L}, \mathcal{H}$ と \mathcal{N} は x, y, t には陽に依存しないものとする。 μ は超臨界性を表す制御パラメータ ($\mu \in \mathbb{R}^m$, m は分岐問題の余次元) である。

(2.12) を ψ について線形化すると、第 j 固有値 $\sigma^{(j)}$ とそれに属する固有関数 $\varphi^{(j)}(x, y, z)$ は固有値問題

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu)\varphi^{(j)}(x, y, z) &= \sigma^{(j)}S\varphi^{(j)}(x, y, z), \quad j \geq 1 \\ \mathcal{H}\varphi^{(j)} &= 0 \quad (z = 0, 1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

を満足する。

固有値 $\sigma^{(j)}$ をすべて求めることができたとして、 $\sigma^{(j)}$ を降べきの順に並べる：

$$\operatorname{Re} \sigma^{(1)} > \operatorname{Re} \sigma^{(2)} > \dots$$

$\varphi^{(j)}(x, y, z)$ を x, y 方向に周期的であると仮定すると、

$$\varphi^{(j)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{m,n}^{(j)}(z) E_1^m E_2^n, \quad E_1 = e^{i\gamma_c x}, \quad E_2 = e^{i\gamma_c(-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2})} \quad (2.8)$$

のように 2 重 Fourier 分解をすることができる。これを (2.7) に代入して、Fourier 成分についての直交関係を用いると、線形固有関数 $\phi_{m,n}^{(j)}(z)$ は、

$$L_{m,n}(\mu)\phi_{m,n}^{(j)} = \sigma_{m,n}^{(j)}S_{m,n}\phi_{m,n}^{(j)} \quad (2.9)$$

に支配される。ここで、

$$L_{m,n}(\mu) = \mathcal{L}(\mu)|_{\partial_x \rightarrow i(m-\frac{n}{2})\gamma_c, \partial_y \rightarrow i\frac{\sqrt{3}}{2}n\gamma_c, \partial_z \rightarrow d/dz} \quad S_{m,n} = S|_{\partial_x \rightarrow i(m-\frac{n}{2})\gamma_c, \partial_y \rightarrow i\frac{\sqrt{3}}{2}n\gamma_c, \partial_z \rightarrow d/dz}$$

は、 z に関する常微分のみを含む線形作用素である。これに対する随伴問題は、

$$\tilde{L}_{m,n}(\mu)\tilde{\phi}_{m,n}^{(j)} = \overline{\sigma_{m,n}^{(j)}}\tilde{S}_{m,n}\tilde{\phi}_{m,n}^{(j)} \quad (2.10)$$

と、

$$\langle \tilde{\phi}_{m,n}^{(j)}, (L_{m,n}(\mu) - \sigma_{m,n}^{(j)}S_{m,n})\phi_{m,n}^{(j)} \rangle = \langle (\tilde{L}_{m,n}(\mu) - \overline{\sigma_{m,n}^{(j)}}\tilde{S}_{m,n})\tilde{\phi}_{m,n}^{(j)}, \phi_{m,n}^{(j)} \rangle \quad (2.11)$$

によって与えられる。 \langle, \rangle は適当な内積を意味する。

さて、ある特定の γ_c と μ の値に対して、すべての線形固有値 $\sigma_{m,n}^{(j)}$ は単純固有値であり、 $\sigma_{m,n}^{(j)}$ に属する固有関数は互いに直交し完全系を成すものとする。その仮定の下に、 $\psi(x, y, z, t)$ を 2 重 Fourier 級数、線形固有関数列で

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{m,n}^{(j)}(t) \phi_{m,n}^{(j)}(z) E_1^m E_2^n \quad (2.12)$$

のように展開する。ここで、 $\psi(x, y, z, t)$ は実数値関数なので、 $\psi(x, y, z, t)$ の実数性の条件

$$A_{-m,-n}^{(j)} = \overline{A_{m,n}^{(j)}}, \quad \phi_{-m,-n}^{(j)} = \overline{\phi_{m,n}^{(j)}}$$

を課す必要がある。(2.12) を (2.6) に代入し、Fourier 成分についての直交関係を用い、 $\tilde{\phi}_{m,n}^{(j)}$ との内積をとると、随伴関数との直交性より、

$$\begin{aligned} \frac{dA_{m,n}^{(j)}}{dt} &= \sigma_{m,n}^{(j)}(\mu) A_{m,n}^{(j)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,m-k,n-l}^{(j,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{m-k,n-l}^{(q)} \\ &\quad (k \leq m-k, l \leq n-l) \end{aligned} \quad (2.13)$$

が得られる。ここで、

$$\sigma_{m,n}^{(j)}(\mu) = \frac{\langle \tilde{\phi}_{m,n}^{(j)}, L_{m,n}^{(j)}(\mu) \phi_{m,n}^{(j)} \rangle}{\langle \tilde{\phi}_{m,n}^{(j)}, S_{m,n} \phi_{m,n}^{(j)} \rangle}, \quad \lambda_{k,l,m-k,n-l}^{(j,p,q)} = \frac{\langle \tilde{\phi}_{m,n}^{(j)}, N(\phi_{k,l}^{(p)}, \phi_{m-k,n-l}^{(q)}) \rangle}{\langle \tilde{\phi}_{m,n}^{(j)}, S_{m,n} \phi_{m,n}^{(j)} \rangle} \quad (2.14)$$

である。(2.13) は、 $A_{m,n}^{(j)}$ に対する振幅方程式であり、 $-\infty \leq m \leq \infty, -\infty \leq n \leq \infty, j \geq 1$ であるので無限次元の力学系を構成する。

3 Centre manifold reduction

ここでは、(2.13) から 6 次元力学系である振幅方程式を中心多様体定理に基づく低減法によって導く。

正六角形格子上で、臨界円上にある中心モードは $A_{1,0}^{(1)}, A_{0,1}^{(1)}, A_{-1,-1}^{(1)}, A_{-1,0}^{(1)}, A_{0,-1}^{(1)}, A_{1,1}^{(1)}$ であるので、中心多様体定理の標準形

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(\operatorname{Spec}(A)) = 0 \\ \operatorname{Re}(\operatorname{Spec}(B)) < -\delta, \delta > 0 \end{cases}$$

に対応する常微分方程式は、(2.13) より、

$$\begin{cases} \dot{A}_{1,0}^{(1)} = \sigma_{1,0}^{(1)} A_{1,0}^{(1)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,1-k,-l}^{(1,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{1-k,-l}^{(q)} \\ \dot{A}_{0,1}^{(1)} = \sigma_{0,1}^{(1)} A_{0,1}^{(1)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,-k,1-l}^{(1,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{-k,1-l}^{(q)} \\ \dot{A}_{-1,-1}^{(1)} = \sigma_{-1,-1}^{(1)} A_{-1,-1}^{(1)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,-1-k,-1-l}^{(1,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{-1-k,-1-l}^{(q)} \\ \dot{A}_{-1,0}^{(1)} = \sigma_{-1,0}^{(1)} A_{-1,0}^{(1)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,-1-k,-l}^{(1,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{-1-k,-l}^{(q)} \\ \dot{A}_{0,-1}^{(1)} = \sigma_{0,-1}^{(1)} A_{0,-1}^{(1)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,-k,-1-l}^{(1,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{-k,-1-l}^{(q)} \\ \dot{A}_{1,1}^{(1)} = \sigma_{1,1}^{(1)} A_{1,1}^{(1)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,1-k,1-l}^{(1,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{1-k,1-l}^{(q)} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{A}_{m,n}^{(j)} = \sigma_{m,n}^{(j)} A_{m,n}^{(j)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,m-k,n-l}^{(j,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{m-k,n-l}^{(q)} \\ \dot{A}_{-m,-n}^{(j)} = \sigma_{-m,-n}^{(j)} A_{-m,-n}^{(j)} + \sum_{k,l,p,q} \lambda_{k,l,-m-k,-n-l}^{(j,p,q)} A_{k,l}^{(p)} A_{-m-k,-n-l}^{(q)} \end{cases} \quad (3.2)$$

のように与えられる。

原点において $(A_{1,0}^{(1)}, A_{0,1}^{(1)}, A_{-1,-1}^{(1)}, A_{-1,0}^{(1)}, A_{0,-1}^{(1)}, A_{1,1}^{(1)})$ 平面 (つまり $A_{m,n}^{(j)} = 0$ 空間 $((m,n) \neq (1,0), (0,1), (-1,-1), (-1,0), (0,-1), (1,1))$ に接する中心多様体は

$$A_{m,n}^{(j)} = h_{m,n}^{(j)}(A_{1,0}^{(1)}, A_{0,1}^{(1)}, A_{-1,-1}^{(1)}, A_{-1,0}^{(1)}, A_{0,-1}^{(1)}, A_{1,1}^{(1)}) \quad (3.3)$$

(ただし、 m, n と j は、 $(m,n) = (1,0), (0,1), (-1,-1), (-1,0), (0,-1), (1,1)$ と $j = 1$ の少なくともいずれかを満たさないものとする。)

によって与えられる。 $h_{m,n}^{(j)}$ とその Jacobi 微分 $dh_{m,n}^{(j)}$ は

$$h_{m,n}^{(j)}(0,0,0,0,0,0) = 0, \quad dh_{m,n}^{(j)}(0,0,0,0,0,0) = 0$$

を満足しなければならない。 $h_{m,n}^{(j)}$ は一般に、 $A_{1,0}^{(1)}, A_{0,1}^{(1)}, A_{-1,-1}^{(1)}, A_{-1,0}^{(1)}, A_{0,-1}^{(1)}, A_{1,1}^{(1)}$ の 2 次以上の多項式で近似することができるから、(3.1), (3.2) に順次代入して係数を比較することにより、5 次の非線形項を含んだ振幅方程式が最終的に

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & z_1[\sigma + \tilde{\mu}_1|z_1|^2 + \tilde{\mu}_2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + \tilde{\nu}_1(z_1 z_2 z_3 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3) + \tilde{\kappa}_1|z_1|^4 \\ & + \tilde{\kappa}_2(|z_1|^4 + |z_2|^4 + |z_3|^4) + \tilde{\kappa}_3(|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^2|z_3|^2 + |z_3|^2|z_1|^2) \\ & + \bar{z}_2 \bar{z}_3[\lambda + \tilde{\nu}_2|z_1|^2 + \tilde{\nu}_3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + \tilde{\kappa}_4(z_1 z_2 z_3 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

のように求められる。なお、(3.4) の導出過程では上下の反転対称性を仮定していない。したがって、(3.4) は正六角形格子のもつ対称群 $D_6 + T^2$ の作用と可換なベクトル場に含まれる不変多項式を原点のまわりに Taylor 展開することによって得られる振幅方程式と一致している。

4 Numerical Results

ϵ の値、境界条件、プラントル数 (流体) を変えた色々な場合について数値計算を行った。その結果、横軸を超臨界性を表すパラメータ $\delta = \frac{R-R_c}{R_c}$ 、縦軸を $|z_1| + |z_2| + |z_3|$ とした平面上に、それぞれの場合の分岐曲線を得た。

$\epsilon = 0$ のときの自由-自由境界条件の $P = 7$ (水) に対する分岐曲線を描くと (Fig.1)、安定なロール、不安定なパッチワークキルト、正三角形、正六角形のブランチがそれぞれ 1 次分岐し、長方形のブランチが正六角形とパッチワークキルトのブランチから 2 次分岐することが分かった。また、正六角形のブランチは、長方形のブランチが 2 次分岐する点から安定となる。これは、Nishida, Ikeda & Yoshihara (2002) の数値解析の結果に定性的に一致する²。このため、正六角形が安定となる点は、 $\delta = 0.2$ という小さくはない値によって与えられるのだが、数値計算結果との一致からこのようなかなり大きな δ の値に対しても弱非線形理論の結果は適用できると考えることができる。自由-自由境界条件の $P = 7$ (水) の他に、固体-固体境界条件の $P = 7$ と $P = 0.71$ (空気) の場合の分岐曲線も得た。 $\epsilon = 0$ のとき、どの場合の分岐曲線も定性的に変わらない。

²分岐点近傍でパッチワークキルトが安定であるという Nishida 達の結果は今回の解析では支持されなかったが、これは彼らの設定した解空間の制限が強すぎたためと考えられる。そのため、今回求めた正三角形のブランチも彼らの結果には含まれていない。

固体-固体境界条件の下で、いくつかの ϵ の値に対して $P = 7$ (水) に対する分岐曲線を描くと、 ϵ の値とともに大きく変化するのは長方形だけであることが分かった。 $\epsilon \neq 0$ のとき、Fig.2 に示すように、 $\epsilon = 0$ の場合と違って、正六角形は z_1, z_2, z_3 の符号がすべて正である H_+ (up-hexagons) と、すべて負である H_- (down-hexagons) の2つに区別できる。そして、長方形にも up-hexagons から2次分岐するブランチと、down-hexagons から2次分岐するブランチがある。 ϵ が0に向かうとこの2本のブランチが接近し、 $\epsilon = 0$ のときその一部は1本になったように見え、他の部分はパッチワークキルトに退化する。また、 $\epsilon \neq 0$ のとき、三角形のブランチは正六角形 H_- のブランチから2次分岐する。この分岐点は、 ϵ が0に向かうとき原点に移動し、 $\epsilon = 0$ の極限で三角形は正三角形に変化する。 $\epsilon = 0$ の場合の正三角形と、 $\epsilon \neq 0$ の場合の三角形のブランチはほとんど重なる。

$\epsilon \neq 0$ のとき、 ϵ は、液体の場合は正、気体の場合は負の値をとる。このため、気体の場合、up-hexagons と down-hexagons のブランチは液体の場合と逆になる (Fig.3)。ここでは $\epsilon = \pm 0.04$ として固体-固体境界条件の $P = 7$ (水) と $P = 0.71$ (空気) の場合を考えたのだが、 $\epsilon = \pm 0.04$ のどの場合の分岐曲線も定性的に変わらない。具体的には、ロールと2本の正六角形のブランチが1次分岐する。 $P = 7$ (水) の場合、 δ が0.2よりも大きい値で up-hexagons と down-hexagons のそれぞれのブランチから、長方形のブランチが2次分岐する。また、 δ が小さい値では、三角形が down-hexagons から、長方形がロールと up-hexagons から2次分岐する。また、サドルノード分岐によって up-hexagons が安定となる。結果的に、 $\epsilon = 0$ と $\epsilon \neq 0$ の場合の分岐曲線はそれぞれ、境界条件、プラントル数 (流体) によって定性的に変化しないと言える。

5 Concluding remarks

今回の研究で得られたすべての分岐曲線では、 δ が約0.2以上で、ロール、up-hexagons と down-hexagons がいずれも安定であった。この2つの正六角形、up-hexagons、down-hexagons が安定な領域を、横軸を波数、縦軸をレイリー数とした平面上に太い実線で描いた (Fig.4)。曲線の上側で2つの正六角形はロールと共に安定である。一点鎖線、破線はそれぞれ、Clever & Busse による安定な正六角形の領域、Busse バルーンのロールの安定な領域を示し、それぞれの曲線の上側で、正六角形、ロールは安定である。今回の研究結果は、Assenheimer & Steinberg の実験結果を支持する Clever & Busse の理論結果に対する必要条件を与える。

References

- [1] A. Schlüter, D. Lortz and F.H. Busse, On the stability of steady finite amplitude convection, *J.Fluid Mech.* **23**, (1965) 129-144.
- [2] E. Buzano and M. Golubitsky, Bifurcation on the hexagonal lattice and the planar Bénard problem, *Phil.Trans.R.Soc.Lond.* **A308** (1983) 617-667.
- [3] F.H. Busse, The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle, *J.Fluid Mech.* **30** (1967) 625-649.
- [4] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory* (Springer-Verlag, New York, 1980)
- [5] K. Fujimura, Centre manifold reduction and the Stuart-Landau equation for fluid motion, *Proc.R.Soc.Lond.* **A453** (1997) 181-203.

- [6] E.L. Koschmieder, On convection under an air surface, *J.Fluid Mech.* **30** (1967) 9–15.
- [7] M. Assenheimer and V. Steinberg, Observation of coexisting upflow and downflow hexagons in Boussinesq Rayleigh-Bénard convection, *Phys.Rev.Lett.* **76** (1996) 756–759.
- [8] M. Golubitsky, J.W. Swift and E. Knobloch, Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection, *Physica* **10D** (1984) 249–276.
- [9] R.M. Clever and F.H. Busse, Hexagonal convection cells under conditions of vertical symmetry, *Phys.Rev. E* **53** (1996) R2037–R2040.
- [10] T. Nishida, T. Ikeda and H. Yoshihara, Pattern formation of heat convection problems in *Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics* (eds. I. Babuska, P.G. Ciarlet and T. Miyoshi), Lecture Notes in Computational Sciences and Engineering Vol.19, pp.209–218, Springer, 2002

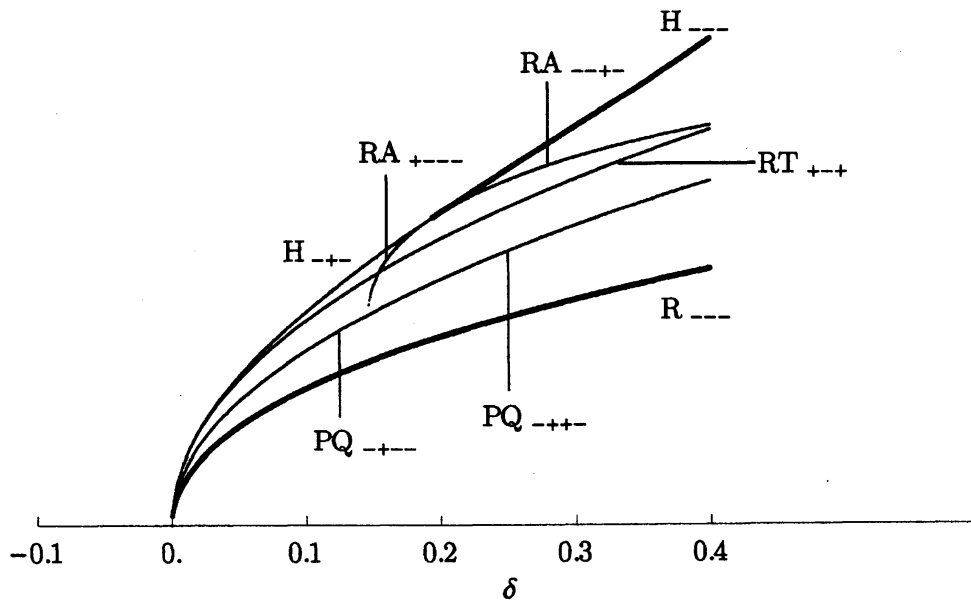


Figure 1: 自由-自由境界条件の下での分岐曲線。 $\epsilon = 0$, $P = 7$. 各ブランチの安定性の指標を付記した。- は固有値実部が負、+ は正を意味する。0 固有値と、固有値の重複度は省略している。

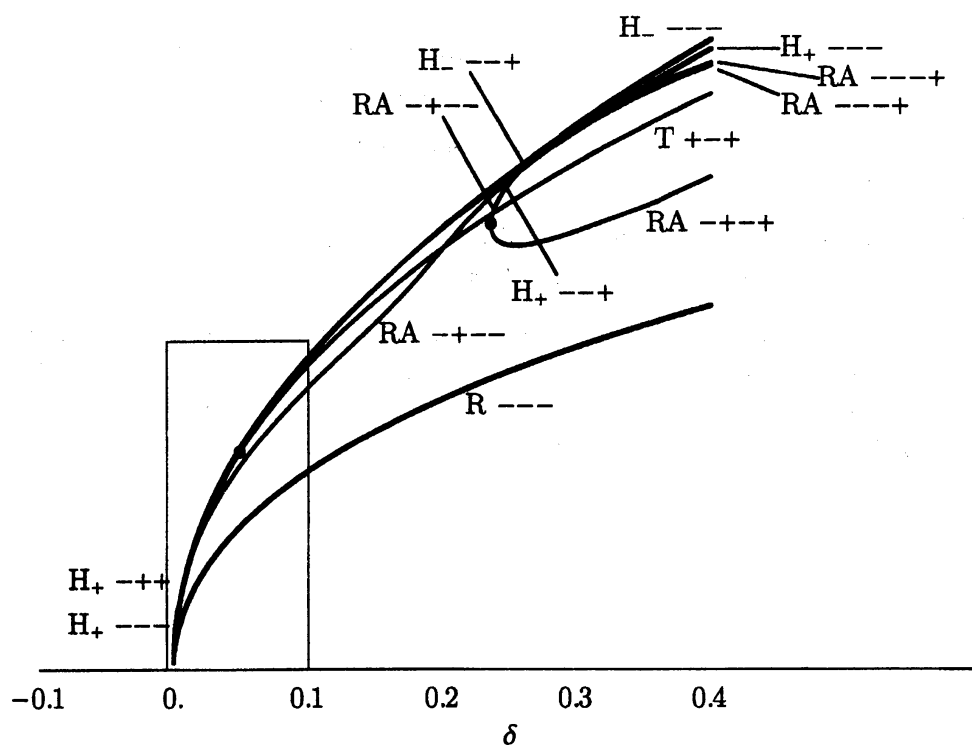


Figure 2: 固体-固体境界条件下での分岐曲線。 $\epsilon = 0.04$, $P = 7$.

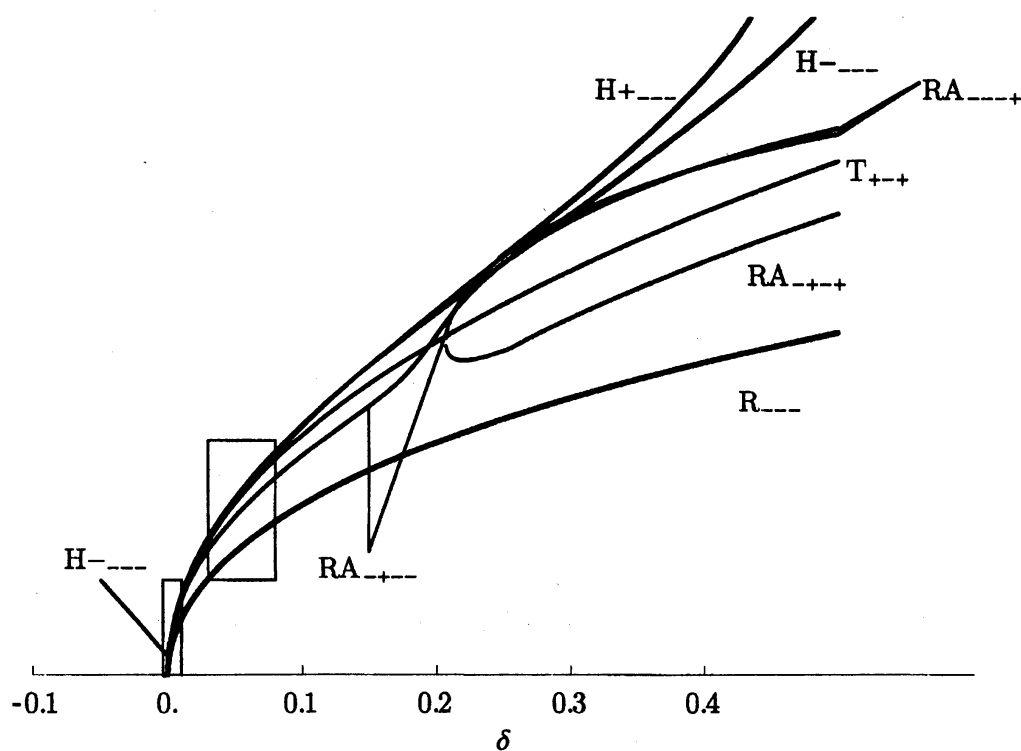


Figure 3: 固体-固体境界条件下での分岐曲線。 $\epsilon = -0.04$, $P = 0.7$.

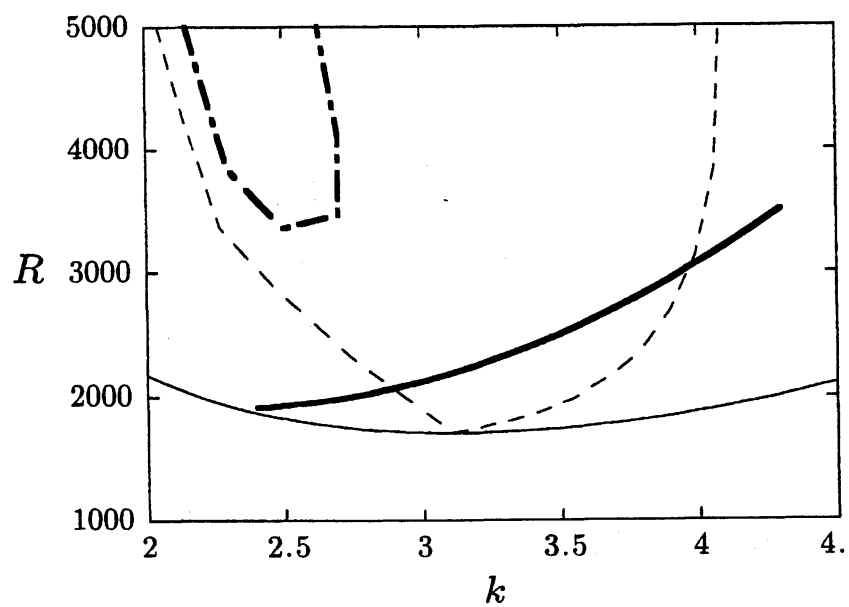


Figure 2: ロールと正六角形の安定領域。 $\epsilon = 0$, $P = 7$. 細い実線：中立安定曲線、太い実線、一点鎖線：Clever & Busse による正六角形の安定領域、破線：Busse balloon.